

电磁场与电磁波 公式总结

Summary By Hawking Zeng

对应教材：《电磁场与电磁波（第 4 版）》 谢处方，饶克谨

符号、变量、常数：

符号	名称	单位	符号	名称	单位
$\rho(\mathbf{r}')$	电荷体密度 传导电流密度	C/m ³	$\mathbf{J}$	电流密度矢量	A/m ²
ϵ	介电常数		γ	传播常数	
ϵ_0	$\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m$		$\mathbf{B}$	磁感应强度	T 或 Wb/m ²
ϵ_r	相对介电常数		k	波数	
μ	磁导率		$\mathbf{H}$	磁场强度	A/m
μ_0	真空的磁导率 $4\pi \times 10^{-7} H/m$		ψ	磁链	
σ	电导率	S/m	$\mathbf{D}$	电位移矢量	C/m ²
Φ			α	衰减常数	Np/m
Ψ	通量		β	相位常数	Rad/m
L	电感	H			

A α Alpha 阿尔法	B β Beta 贝塔	Γ γ Gamma 伽玛	Δ δ Delta 德尔塔	E ε Epsilon 艾普西龙	Z ζ Zeta 捷塔
H η Eta 依塔	Θ θ Theta 西塔	I ι Iota 艾欧塔	K κ Kappa 喀帕	Λ λ Lambda 拉姆达	M μ Mu 缪
N ν Nu 拗	Ξ ξ Xi 克西	O ο Omicron 欧麦克伦	Π π Pi 派	Ρ ρ Rho 柔	Σ σ Sigma 西格玛
T τ Tau 套	Υ υ Upsilon 宇普西龙	Φ φ Phi 服艾	Χ χ Chi 器	Ψ ψ Psi 普赛	Ω ω Omega 欧米伽

第一章

1.散度定理（高斯定理）： $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

2.斯托克斯定理（矢量场 $\mathbf{F}$ 所在空间，曲线 C 为周界的曲面 S ）： $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$

第二章

2.1.2 电流及电流密度

1. 体电流

1) $\mathbf{J} = \mathbf{e}_n \frac{di}{dS}$ (2.1.10) P36, 单位 A/m²

2) 通过任意截面的电流： $i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ (2.1.11) P37

2. 面电流

1) $\mathbf{J}_S = \mathbf{e}_n \frac{di}{dl}$ (2.1.12) P37, 单位 A/m

2) 通过薄导体层上任意有向曲线 l 的电流为： $i = \int_l \mathbf{J}_S \cdot (\mathbf{n}_1 \times d\mathbf{l})$, $\mathbf{n}_1$ 为薄导体层的法向单位矢量。

1.电流连续性方程的积分形式： $i = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$

2.电流连续性方程的微分形式： $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

3.点电荷电场强度（球坐标系）： $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{F}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$

4.球体场点 $\mathbf{r}$ 处电场强度： $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV'$

5.面上（圆面）场点 $\mathbf{r}$ 处电场强度： $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho_S(\mathbf{r}') dS'$

6.高斯定理的微分形式： $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

7.高斯定理的积分形式： $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$

8.毕奥-萨伐尔定律： $\mathbf{r}'$: 电流元 $I d\mathbf{l}'$ 所在点（原点）的位置矢量, $\mathbf{r}$: 所求得 $\mathbf{B}$ 所在场点的位置矢量,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.3.5) \text{ P46, 磁感应强度 } \mathbf{B} \text{ 的单位是 T (特斯拉), 或 Wb/m}^2 \text{ (韦伯/}$$

米²) .

9. 线电流圆环的中心点上, $z=0$, 磁感应强度最大: $\mathbf{B}(0) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a}$, I 是线电流, a 是圆环半径

10. 磁通连续性定理的微分形式: $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$

11. 磁通连续性定理的积分形式: 磁通 $\Phi = \psi = \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV = 0 \quad (2.3.12) \text{ P48}$

12. 安培环路定理微分形式: $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$, μ_0 : 真空的磁导率, $\mathbf{J}(\mathbf{r})$: 电流密度矢量

13. 安培环路定理的积分形式: $\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$

14. χ_e : 电极化率, 极化强度: $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$

15. S 限定的体积 V 内的极化电荷密度: $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$

16. 电介质表面上的极化电荷密度: $\rho_{sp} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$

17. 电介质中高斯定律的微分形式: $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho$, $\mathbf{D}(\mathbf{r})$: 电位移矢量。

18. 电介质中高斯定律的积分形式: $q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad (2.4.12) \text{ P53}$

19. 电介质的本构关系: $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ 称为电介质的介电常数

2.4.2 磁介质的磁化 磁场强度

1. 磁化电流: $I_M = \oint_C dI_M = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \nabla \times \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$, J_M : 磁化电流密度 $\mathbf{M}$: 磁化强度

2. 磁化电流: $I_M = \oint_S \mathbf{J}_M \cdot d\mathbf{S}$

3. 磁介质内磁化电流体密度与磁化强度的关系: $J_M = \nabla \times \mathbf{M}$

4. 磁介质表面的磁化电流密度: $\mathbf{J}_{SM} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$

5. 真空中的安培环路定理推广到磁介质: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M)$

6. 磁场强度: $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$

7. 磁介质安培环路定理微分形式: $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J} \quad (2.4.24) \text{ P58, 安培环路定理对时变电磁场不成立}$

8. 磁介质安培环路定理积分形式: $\mathbf{I} = \oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$

9. 磁介质的本构关系: $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, 代入 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$, 得 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi_m \mathbf{H}$, 即

$\mathbf{B} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$, $\mu = \mu_r \mu_0$ 称为磁介质的磁导率, χ_m 称为磁介质的磁化率

2.4.3 媒质的传导特性

1. 欧姆定律的微分形式: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ 也称为传导电流密度, σ 称为媒质的电导率, 单位是 S/m (西门子/米)

2. 焦耳定律的微分形式: 单位体积功率: $p = \frac{dp}{dV} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$

3. 焦耳定律的积分形式: $P = \int_V p dV = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$

2.5 电磁感应定律和位移矢量

2.5.1 法拉第电磁感应定律

1. 推广了的法拉第电磁感应定律的积分形式: 电动势 $\varepsilon_{in} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ (2.5.3) P63

2. 回路静止, 磁场变化的感应电动势: $U = \varepsilon_{in} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ (2.5.4) P64

3. 法拉第电磁感应定律的微分形式: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

4. 静态磁场 $\mathbf{B}$, 导体棒运动速度 $\mathbf{v}$ 的感应电动势: $U = \varepsilon_{in} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$

5. 导体在时变磁场运动: $U = \varepsilon_{in} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ (2.5.7) P64, 称为法拉第电磁感应定律积分形式的一般形式

6. 法拉第电磁感应定律微分形式的一般形式: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

2.5.2 位移电流

1. 恒定电流的连续性方程: $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, P67

2. 由安培环路定理得: 传导电流 $i(t) = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$

3. 时变条件下的电流连续性方程: $\nabla \cdot (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = 0$ (2.5.9) P67, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 是电位移矢量随时间的变化

率, 单位 A/m², 与电流密度的单位相同, 故将 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 称为位移电流密度, 记为 $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (2.5.10) P68

4. 安培环路定理修正： $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (2.5.11) P68

2.6 麦克斯韦方程组

2.6.1 麦克斯韦方程组的积分形式

2.6.2 麦克斯韦方程组的微分形式

	积分形式	微分形式
1.麦克斯韦第一方程（全电流定律）：	$I = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ (2.6.1)P70	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (2.6.5)P71
2.麦克斯韦第二方程（电磁感应定律）：	$U = \varepsilon_{in} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ (2.6.2)P70	$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (2.6.6)P71
3.麦克斯韦第三方程（磁通连续性原理）：	$\Phi = \psi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ (2.6.3)P71	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (2.6.7)P71
4.麦克斯韦第四方程（高斯定律）：	$q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$ (2.6.4)P70	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (2.6.8)P71

2.6.3 媒质的本构关系

1. $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ (2.6.9)P71

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ (2.6.10)P71

$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (2.6.11)P72

2. 将(2.6.9)~(2.6.11)代入(2.6.5)~(2.6.8)得到 麦克斯韦方程组的限定形式:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned}$$

2.7 电磁场的边界条件

2.7.1 边界条件的一般形式

1.

第三章 静态电磁场及其边值问题的求解

3.1 静电场分析

3.1.1 静电场的基本方程和边界条件

1. 基本方程

由麦克斯韦方程组得出静电场的基本方程：

	积分形式	微分形式
	$q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = q \quad (3.1.1) \text{ P89}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.1.3) \text{ P89}$
	$U = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.1.2) \text{ P89}$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.1.4) \text{ P89}$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.1.5) \text{ P89}$$

2. 边界条件

两种介质分界面上，电场强度满足以下关系式：

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \text{ 或 } E_{1t} = E_{2t} \quad (3.1.6) \text{ P90, 表明电场强度的切向分量是连续的。}$$

电位移矢量满足的关系式是：

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \text{ 或 } D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (3.1.7) \text{ P90, 表明在两种媒质的分界面上存在自由面电荷}$$

分布时，电位移矢量的法向分量是不连续的。

若分界面上不存在面电荷，，即 $\rho_s = 0$ ，则：

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \text{ 或 } D_{1n} = D_{2n} \quad (3.1.8) \text{ P90, 此时，} \mathbf{D} \text{ 的法向分量是连续的。式 (3.1.8) 改写成:}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

可见，当 $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ 时， $\mathbf{E}$ 的法向分量是不连续的，这是因为分界面上存在束缚电荷密度。

3.1.2 电位函数

1. 电位和电位差

$$\text{电位函数 } \varphi(\mathbf{r}): \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}) \quad (3.1.9) \text{ P90, 单位 V (伏特)}$$

点电荷 q 产生的电场的电位函数: $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + C$ (3.1.10) P91, C 为任意常数

$\varphi(P) = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ (3.1.15) P92, Q : 固定的电位参考点, 该固定点电位为零, P : 所求点电位。

2. 静电位的微分方程

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

3.1.1 导体系统的电容

$$C = \frac{q}{U}$$

1. 双导体的电容计算

- ① 根据导体的几何形状, 选取合适的坐标系
- ② 假定两导体上分别带电荷 $+q$ 和 $-q$
- ③ 根据假定的电荷求出 $\mathbf{E}$
- ④ 由 $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 求得电位差
- ⑤ 求出比值 $C = \frac{q}{U}$

2. 部分电容

(1) 电位系数

电位系数

自电位系数

互电位系数

(2) 电容系数

电容系数或感应系数

自电容系数

互电容系数

3.1.4 静电场的能量

3.1.5 静电力

3.2 导电媒质中的恒定电场分析

3.2.1 恒定电场的基本方程和边界条件

1. 基本方程

恒定电场下:

积分形式: $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$ (3.2.1a) P106

相应的微分形式： $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ (3.2.1b) P106

积分形式： $\varepsilon_{\text{in}} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ (3.2.2a) P106

相应的微分形式： $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (3.2.2b) P106

因而恒定电场可用电位梯度表示： $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ (3.2.3) P106

均匀导电媒质 ($\sigma = \text{常数}$) 中的电位满足拉普拉斯方程： $\nabla^2 \varphi = 0$

2. 边界条件

3.2.2 恒定电场与静电场的比拟

1) 恒定电场与静电场的比拟

	均匀导电媒质中的恒定电场 (电源外部)	均匀电介质中的电场 ($\rho = 0$ 的区域)
基本方程	$U = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ $I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$
本构关系	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
位函数方程	$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$
边界条件		

$$2) \quad C = \frac{q}{U} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\varepsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (3.2.10) \text{ P108}$$

$$3) \quad G = \frac{I}{U} = \frac{\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\sigma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (3.2.11) \text{ P108}$$

3.3 恒定磁场分析

1. 基本方程

积分形式	微分形式
$I = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.3.1) \text{ P111}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.3.3) \text{ P111}$
$\Phi = \psi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.3.2) \text{ P111}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3.4) \text{ P111}$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.3.5) \text{ P111}$$

2. 边界条件

3.3.2 矢量磁位和标量磁位

1. 矢量磁位

2. 标量磁位

3.3.3 电感

1. 自感

1) 自感系数 (自感): $L = \frac{\Psi}{I} \quad (3.3.32) \text{P117}$

2) 内自感: $L_i = \frac{\Psi_i}{I} \quad (3.3.33) \text{P117}$

3) 外自感: $L_o = \frac{\Psi_o}{I} \quad (3.3.34) \text{P117}$

4) 总自感: $L = L_i + L_o \quad (3.3.34) \text{P117}$

2. 互感

3.3.4 恒定磁场的能量

1. 磁场能量

2. 能量密度

3.3.5 磁场力

3.4 静电场的边值问题及解的唯一性定理

3.4.1 边值问题的类型

3.4.2 唯一性定理

3.5 镜像法

3.5.1 接地导体平面的镜像

1. 点电荷对无限大接地导体平面的镜像
2. 线电荷对无限大接地导体平面的镜像
3. 点电荷对相交半无限大接地导体平面的镜像

3.5.2 导体球面的镜像

1. 点电荷对接地导体球面的镜像
2. 点电荷对不接地导体球面的镜像

3.5.3 导体圆柱面的镜像

1. 线电荷对导体圆柱面的镜像
2. 两平行圆柱导体的电轴

3.5.4 介质平面的镜像

1. 点电荷对电介质分界面的镜像
2. 线电流对磁介质分界面的镜像

3.6 分离变量法

3.7 有限差分法

第四章 时变电磁场

4.1 波动方程

1. 无源区域中电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 满足的波动方程: $\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ (4.1.5)P173

2. 无源区域中磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ 满足的波动方程: $\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$ (4.1.6) P173

4.2 电磁场的位函数

4.2.1 矢量位和标量位

1. $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (4.2.1) P173, 矢量函数 $\mathbf{A}$ 称为电磁场的矢量位, 单位是 $T \cdot m$ (特斯拉·米)

2. $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$ (4.2.2) P174, φ 称为电磁场的标量位, 单位是 V (伏特)

3. 洛伦兹条件: $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ (4.2.5) P174, 应用:

4.2.2 达朗贝尔方程

1. $\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$ (4.2.8) P175

$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho$ (4.2.9) P175

4.3 电磁能量守恒定律

1. 电场能量密度: $\omega_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ (4.3.1) P175

2. 磁场能量密度: $\omega_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ (4.3.2) P175

3. 电磁场能量密度: $\omega = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ (4.3.3) P175

4. 能流密度矢量 (坡印廷矢量): $\mathbf{S}$, 单位 W/m^2 (瓦/米²)

5. 坡印廷定理: $-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_V (\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$ (4.3.5) P176;

$\frac{d}{dt} \int_V (\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dV$ 是在单位时间内体积 V 中所增加的电磁场能量; $\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$ 是在单位时间

内电场对体积 V 中的电流所做的功。

6. 电磁能流密度矢量: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \neq \mathbf{H} \times \mathbf{E}$ (4.3.6) P177

4.4 唯一性定理

4.5 时谐电磁场

4.5.1 时谐电磁场的复数表示

4.5.2 复矢量的麦克斯韦方程

一般时变电场	复数形式	
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (2.6.5)P71	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{j}\omega\mathbf{D}$ (4.5.9)P183	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ (2.6.9)P71
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (2.6.6)P71	$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}\omega\mathbf{B}$ (4.5.10)P183	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (2.6.10)P71
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (2.6.7)P71	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (4.5.11)P183	
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (2.6.8)P71	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (4.5.12)P183	

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (2.6.11)P72$$

4.5.3 复电容率和复磁导率

$$1) \quad \text{等效复介电常数或复电容率: } \varepsilon_c = \varepsilon - \mathbf{j}\frac{\sigma}{\omega} \quad (4.5.14) \text{ P183}$$

$$2) \quad \text{复介电常数或复电容率: } \varepsilon_c = \varepsilon' - \mathbf{j}\varepsilon'' \quad (4.5.15) \text{ P183}$$

4.5.4 亥姆霍兹方程

$$1) \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (4.5.21) \text{ P184}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (4.5.21) \text{ P184}$$

$$\text{式中 } k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (4.5.22) \text{ P185}$$

$$\text{如果媒质是有损耗的: } k_c = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$$

4.5.5 时谐场的位函数

4.5.6 平均能量密度和平均能流密度矢量

$$1) \quad \text{平均能流密度矢量 (平均坡印廷矢量): } \mathbf{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{S} dt \quad (4.5.29) \text{ P186}$$

2) 平均能流密度矢量 (平均坡印廷矢量): $\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$ (4.5.30) P186

3) 电场能量密度:

4) 磁场能量密度:

第五章 均匀平面波在无界空间中的传播

5.1 理想介质中的均匀平面波

5.1.1 理想介质中的均匀平面波函数

5.1.2 理想介质中的均匀平面波的传播特点

1) 周期: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

2) 频率: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

3) 波长: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

4) 由 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f\sqrt{\mu\varepsilon}$ 得: $\lambda = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}$

5) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

6) 相速: $v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$

7) 由 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 得: $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

8) 波阻抗: $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

9) 自由空间中: $\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377(\Omega)$

10) 磁场与电场之间满足: $\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}$ 或 $\mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \mathbf{e}_z$

11) 理想介质中, 瞬时坡印廷矢量: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{E} \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}) = \mathbf{e}_z \frac{1}{\eta} |\mathbf{E}|^2$ (5.1.25) P196

12) 理想介质中, 平均坡印廷矢量: $\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = \frac{1}{2\eta} \text{Re}[\mathbf{E} \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}^*)] = \mathbf{e}_z \frac{1}{2\eta} |\mathbf{E}_m|^2$ (5.1.26)

P196, 由此可见, 均匀平面波电磁能量沿波的传播方向流动。

5.1.3 沿任意方向传播的均匀平面波

5.2 电磁波的极化

5.2.1 极化的概念

1) 电磁波的极化: 在空间任意跟定点上, 合成波电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 的大小和方向都可能会随时间变化的现象。

2) 直线极化:

3) 圆极化:

4) 椭圆极化:

5.2.2 直线极化波

1) 直线极化波: 电场的 x 分量和 y 分量的相位相同或相差 π , 即 $\phi_y - \phi_x = 0$ 或 $\pm \pi$ 时, 则合成波为直线极化波。

2) 垂直极化波:

3) 水平极化波

5.2.3 圆极化波

4) 圆极化波: 电场的 x 分量和 y 分量的振幅相等、但相位差为 $\frac{\pi}{2}$, 即 $E_{xm} = E_{ym} = E_m$ 、 $\phi_y - \phi_x = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, 则合成波为圆极化波。

- 1)
- 2) 左旋圆极化波:
- 3) 右旋圆极化波:

5.2.4 椭圆极化波

- 1) 椭圆极化波: 电场的 x 分量和 y 分量的振幅和相位差都不相等, 则合成波为椭圆极化波。

5.3 均匀平面波在导电媒质中的传播

5.3.1 导电媒质中的均匀平面波

5.3.2 弱导电媒质中的均匀平面波

- 1) 弱导体: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ 。弱导体中, 位移电流起主要作用, 传导电流的影响很小, 可忽略不计。在 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ 下, 传播常数 γ 可近似为:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})} \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon}(1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}), \text{ 即}$$

$$\text{衰减常数: } \alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{Np/m (5.3.20) P208}$$

$$\text{相位常数: } \beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad \text{rad/m (5.3.21) P208}$$

$$\text{本征阻抗: } \eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon})^{-1/2}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}) \quad (5.3.22) \text{ P208}$$

5.3.3 良导体中的均匀平面波

- 2) 良导体: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ 。良导体中, 传导电流起主要作用, 位移电流的影响很小, 可忽略不计。在 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ 下, 传播常数 γ 可近似为:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})} \approx j\omega\sqrt{\frac{\mu\sigma}{j\omega}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma}, \text{ 即}$$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (5.3.23) \text{ P208}$$

- 3) 良导体的本征阻抗: $\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi f \mu}{\sigma}} e^{j\pi/4} \quad (5.3.24) \text{ P208, 这表明,}$

良导体中, 磁场的相位滞后于电场 45° 。

4) 良导体中，电磁波的相速为：
$$v = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (5.3.25) \text{ P209}$$

5) 趋肤效应：良导体中的电磁波局限于导体表面附近的区域的现象。工程上常用**趋肤深度** δ （或穿透深度）来表征电磁波的趋肤程度，其定义为电磁波的幅值衰减为表面值的 $1/e$ （或 0.368）时电磁波所传播的距离。按此定义，有：

$$e^{-\alpha\delta} = 1/e, \text{ 故}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \quad (5.3.27) \text{ P209}$$

6) 按式 (5.3.24)，良导体的本征阻抗为：
$$\eta_c \approx (1+j)\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} = R_s + jX_s \quad (5.3.28) \text{ P209}$$

具有相等的电阻和电抗分量 $R_s = X_s = \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta}$ (5.3.29) P209

$R_s = \frac{1}{\sigma\delta}$ 表示厚度为 δ 的导体每平方米的电阻，称为导体的**表面电阻率**，简称**表面电阻**。

相应的 X_s 称为表面电抗， $Z_s = R_s + jX_s$ 称为表面阻抗。

7)

5.4 色散与群速

1) 相速：电磁波的恒定相位点的推进速度。

2) 电场为 $E(z,t) = E_m \cos(\omega t - \beta z)$ 的电磁波，其恒定相位点为 $\omega t - \beta z = \text{常数}$ ，相速应为

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (5.4.1) \text{ P213, 相位常数 } \beta. \text{ 理想介质 } \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \text{ 与角频率成线性关系, 于是 } v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

是一个与频率无关的常数，因此理想介质是非色散的。

3) 合成波是受调制的，称为包络波。

4) 群速：包络波上任一恒定相位点的推进速度。由 $\Delta\omega t - \Delta\beta z = \text{常数}$ ，可得群速：

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (5.4.2) \text{ P214, 由于 } \Delta\omega \ll \omega, \text{ 上式变为: } v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (5.4.3) \text{ P214}$$

5) 利用式 (5.4.1)，可得群速与相速之间的关系：
$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d(v_p\beta)}{d\beta} = v_p + \beta \frac{dv_p}{d\beta} = v_p + \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega} v_g$$

由此得到：
$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega}} \quad (5.4.4) \text{ P214}$$

6) 由式 (5.4.4) 可知, 群速与相速一般是不相等的, 存在以下三种可能情况

① $\frac{dv_p}{d\omega} = 0$, 即相速与频率无关, 此时 $v_g = v_p$, 即群速等于相速, 称为无色散。

② $\frac{dv_p}{d\omega} < 0$, 即相速随着频率的升高而减小, 此时 $v_g < v_p$, 即群速小于相速, 这种情况称为正常色散。

③ $\frac{dv_p}{d\omega} > 0$, 即相速随着频率升高而增加, 此时 $v_g > v_p$, 即群速大于相速, 这种情况称为反常色散。